

# Cartes de grand genre : de la hiérarchie KP aux limites probabilistes

Baptiste Louf

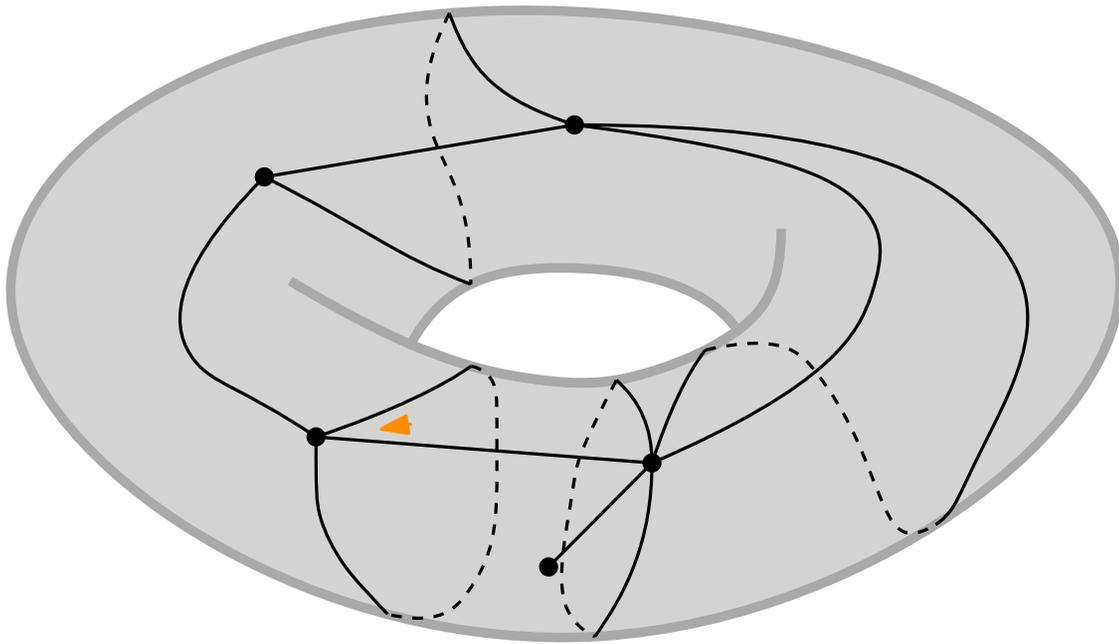
sous la direction de Guillaume Chapuy

26 juin 2020



Travail financé par l'ERC – Stg 716083 – “CombiTop”

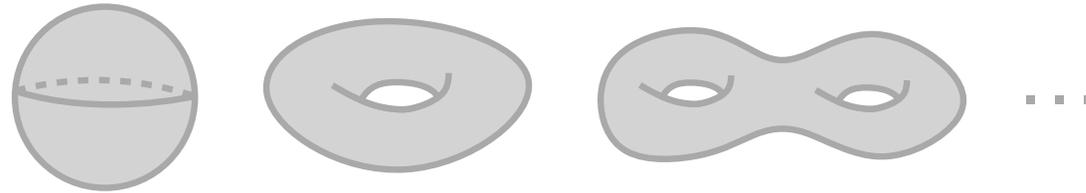
Quel est le rapport entre ces deux images ?



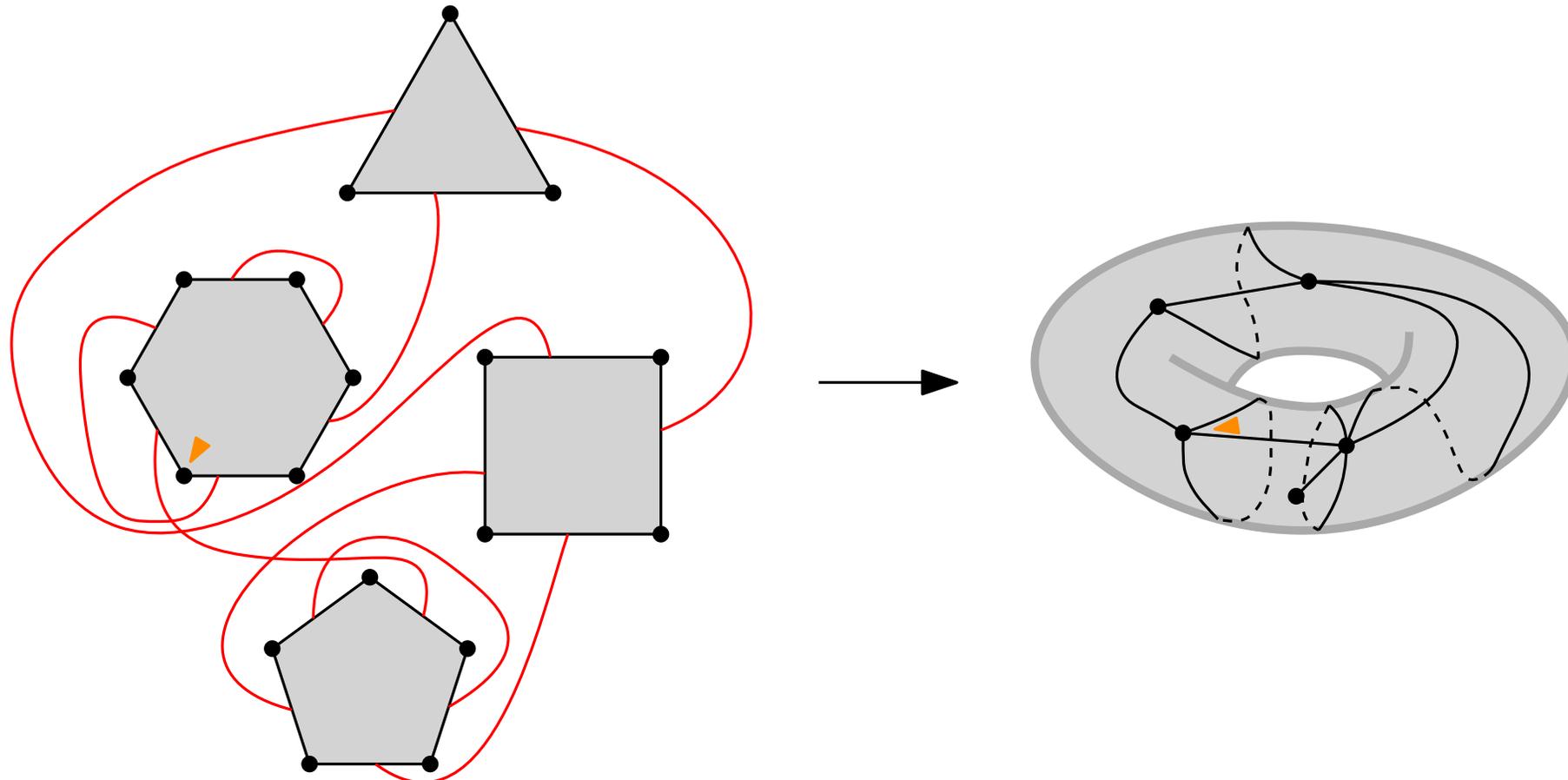
# Les cartes combinatoires

Carte = recollement de polygones selon leurs côtés pour former une surface  
(compacte, connexe, orientée)

Genre  $g = \#$  d'anses

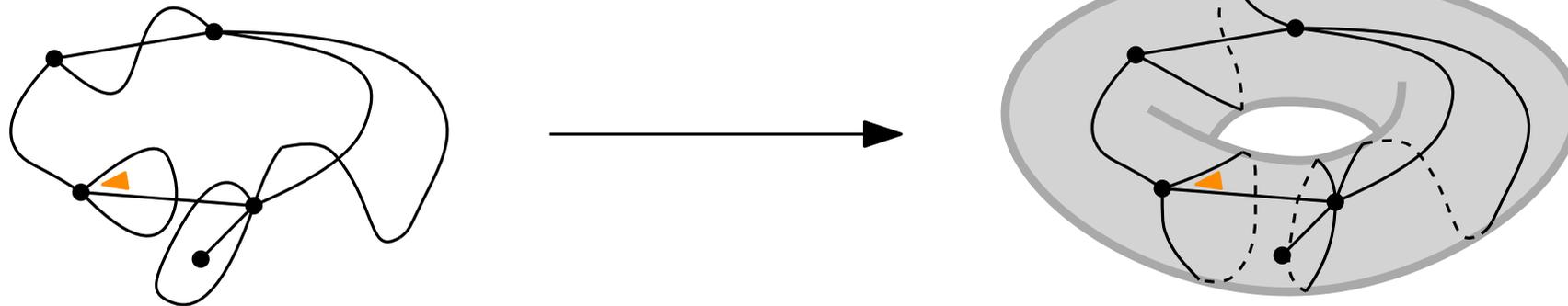


Enracinée = un coin est distingué



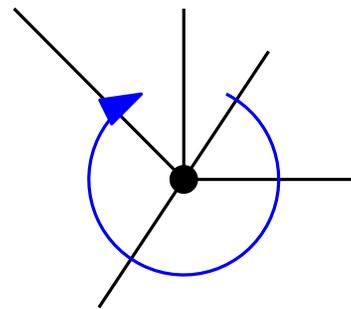
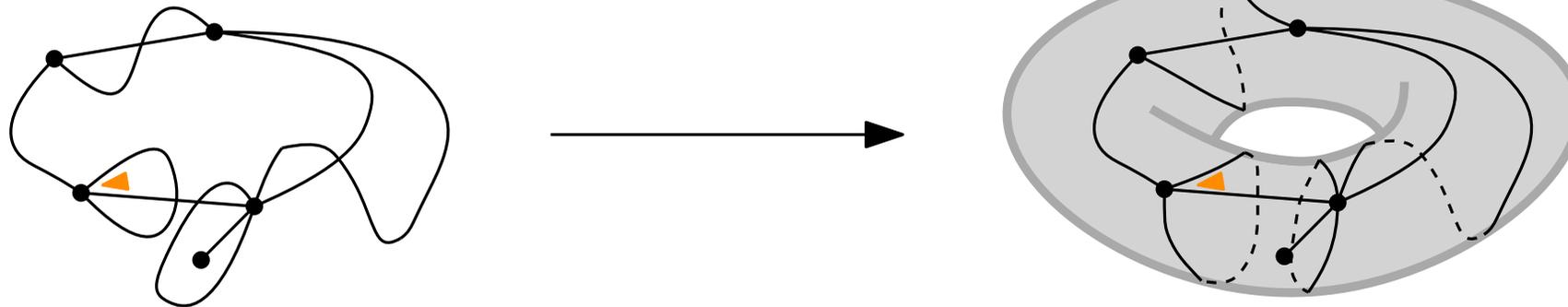
# Les cartes combinatoires

Définition alternative : graphe plongé sur une surface



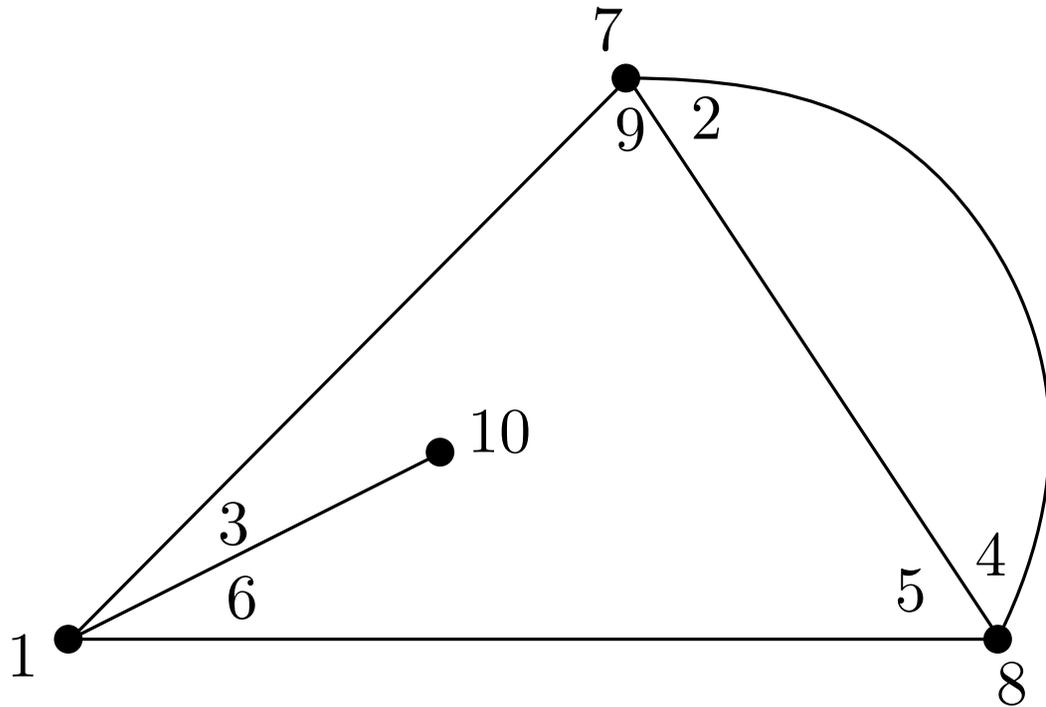
# Les cartes combinatoires

Définition alternative : graphe plongé sur une surface



Ce qui compte, c'est l'ordre des arêtes autour des sommets !

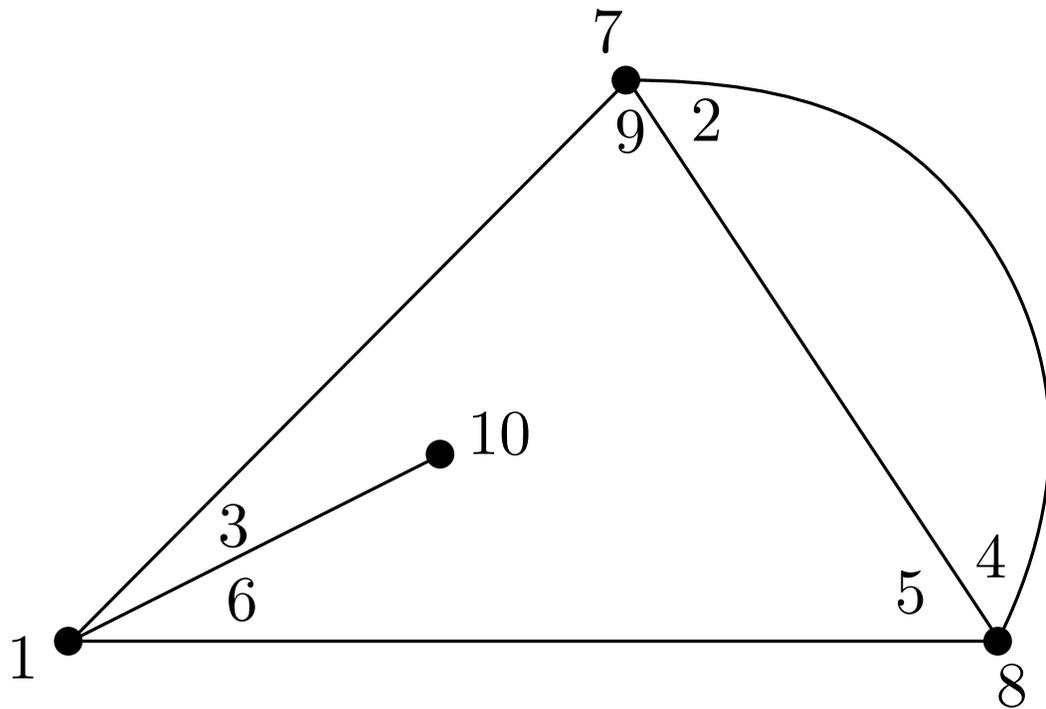
# Cartes étiquetées et factorisations de permutations



$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 3, 6)(2, 9, 7)(4, 8, 5)(10) \\ \phi &= (1, 8, 7)(2, 4)(3, 9, 5, 6, 10) \\ \alpha &= (1, 9)(2, 5)(3, 10)(4, 7)(6, 8)\end{aligned}$$

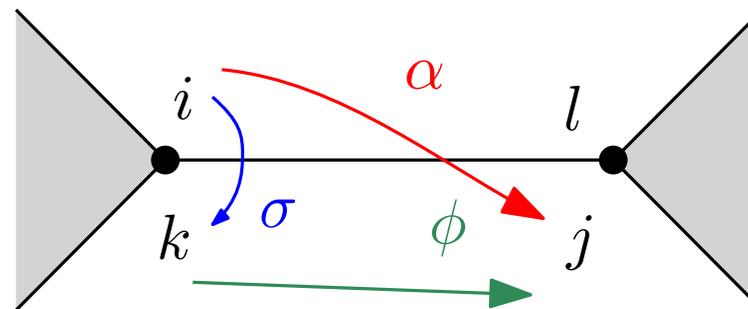
$$\phi\sigma = \alpha$$

# Cartes étiquetées et factorisations de permutations



$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 3, 6)(2, 9, 7)(4, 8, 5)(10) \\ \phi &= (1, 8, 7)(2, 4)(3, 9, 5, 6, 10) \\ \alpha &= (1, 9)(2, 5)(3, 10)(4, 7)(6, 8)\end{aligned}$$

$$\phi\sigma = \alpha$$



Pourquoi s'intéresser aux cartes ?

Pourquoi s'intéresser aux cartes ?

→ parce qu'on peut les étudier sous pleins d'angles différents !

# Étudier les cartes **par séries génératrices**

## Exemple :

$a_n$  = nb de cartes planaires à  $n$  arêtes

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

Méthode symbolique, variables catalytiques, inversion de Lagrange, analyse de singularités, séries multivariées ...

Flajolet      Bender      Bernardi      Canfield      Tutte  
Sedgewick      Bousquet-Mélou  
Gao      ●      ●      ●

# Étudier les cartes **par séries génératrices**

## Exemple :

$a_n$  = nb de cartes planaires à  $n$  arêtes

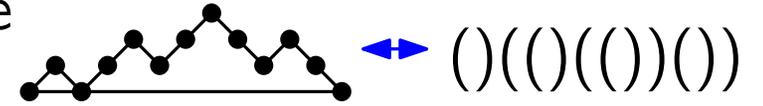
$$F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \longrightarrow a_n = \frac{2 \cdot 3^n \cdot \text{Cat}(n)}{n + 2} \quad [\text{Tutte '63}]$$

Méthode symbolique, variables catalytiques, inversion de Lagrange, analyse de singularités, séries multivariées ...

Flajolet      Bender      Bernardi      Canfield      Tutte  
Sedgewick      Bousquet-Mélou  
Gao      ●      ●      ●

# Étudier les cartes **de manière bijective**

Bijection = correspondance explicite entre des objets par une construction combinatoire



Bouttier

Chapuy

Schaeffer

Cori

Fusy

Albenque

Di Francesco

Bousquet-Mélou

Poulalhon

Miermont

Gitter

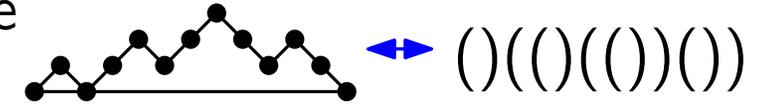
Bernardi

Vauquelin

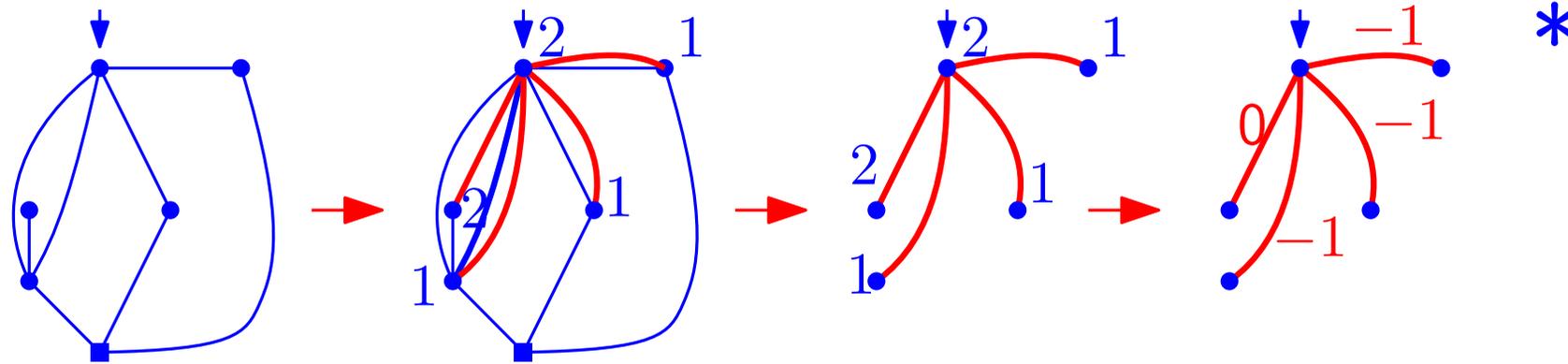


# Étudier les cartes **de manière bijective**

Bijection = correspondance explicite entre des objets par une construction combinatoire



**Exemple :** bijection de Schaeffer



Énumération + propriétés structurelles des cartes

Bouttier			Poulalhon	Guitter
	Chapuy		Di Francesco	Bernardi
Schaeffer	Fusy		Miermont	Vauquelin
Cori	Albenque		Bousquet-Mélou	● ● ●

# Étudier les cartes **de manière algébrique**

Point de départ : formule de Frobenius, qui compte les factorisations de permutations en fonction des caractères du groupe symétrique

Goupil

Jackson

Goulden

Schaeffer

Zagier

Harer

Poulalhon



# Étudier les cartes **de manière algébrique**

Point de départ : formule de Frobenius, qui compte les factorisations de permutations en fonction des caractères du groupe symétrique

**Exemple** : compter les cartes à une face à degrés prescrits [Goupil–Schaeffer '98]

$$\epsilon_g(n; \lambda) = \frac{(l + 2g - 1)!}{2^{2g-1} \prod_i m_i!} \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_l = g} \prod_i \frac{1}{2\gamma_i + 1} \binom{\lambda_i - 1}{2\gamma_i}$$

et surtout la **hiérarchie KP** ! (coming soon)

Goupil

Jackson

Goulden

Schaeffer

Zagier

Harer

Poulalhon



# Étudier les cartes **de manière probabiliste**

Idée : étudier les propriétés géométriques des grandes cartes aléatoires

Albenque

Budd

Marckert

Miller

Angel

Curien

Le Gall

Schaeffer

Bettinelli

Schramm

Chassaing

Miermont

Sheffield



# Étudier les cartes **de manière probabiliste**

Idée : étudier les propriétés géométriques des grandes cartes aléatoires

**Exemple** : les cartes planaires uniformes convergent (en tant qu'espaces métriques, après mise à l'échelle des distances) vers la **carte Brownienne**

[Le Gall, Miermont '13]

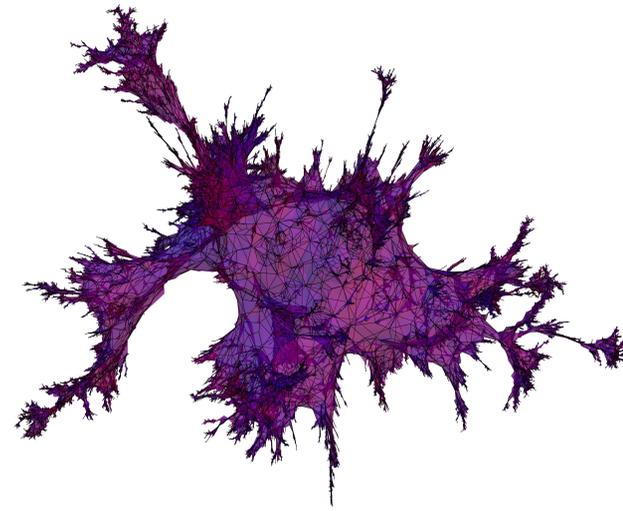


image : J. Bettinelli

et bien sûr la **convergence locale** ! (on en parle un peu plus tard)

Albenque

Budd

Marckert

Miller

Angel

Curien

Le Gall

Schaeffer

Bettinelli

Schramm

Chassaing

Miermont

Sheffield



# Tout est lié

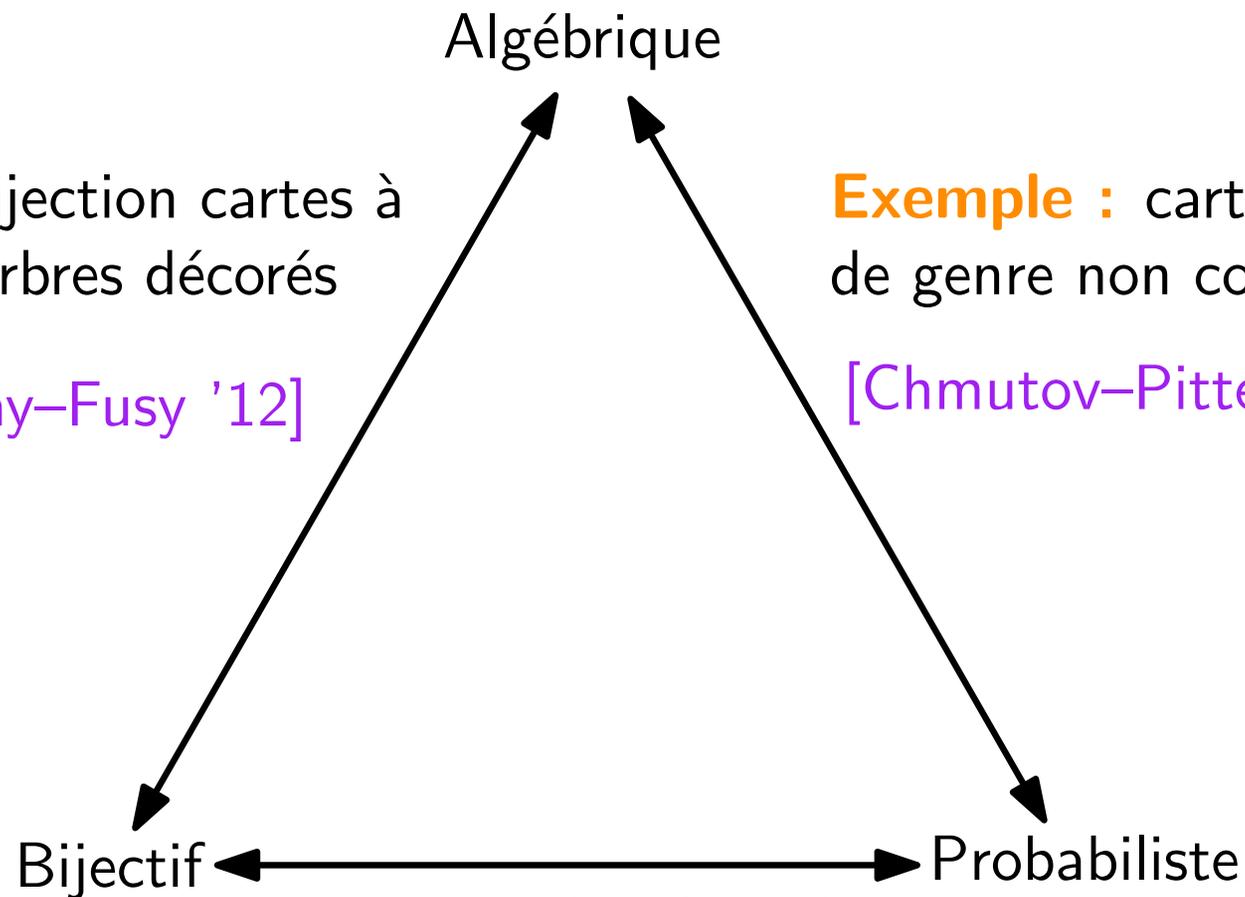


**Exemple :** bijection cartes à une face  $\leftrightarrow$  arbres décorés

[Chapuy–Féray–Fusy '12]

**Exemple :** cartes aléatoires de genre non contraint

[Chmutov–Pittel '15]



**Exemple :** diamètre des cartes planaires aléatoires

[Chassaing–Schaeffer '02]

Dans cette thèse, on combine ces trois approches pour étudier les cartes de grand genre, en lien avec la hiérarchie KP

## Interlude : La hiérarchie KP



photo : M. Griffon

# La hiérarchie KP

A l'origine : équation Kadomtsev–Petviashvili (ondes non linéaires, généralise KdV)

# La hiérarchie KP

A l'origine : équation Kadomtsev–Petviashvili (ondes non linéaires, généralise KdV)

Variables :  $p_1, p_2, p_3, \dots$

$p_1 = x, p_2 = y, p_3 = t$

$$F_{3,1} = F_{2,2} + \frac{1}{2}F_{1,1}^2 + \frac{1}{12}F_{1,1,1,1}$$

$$F_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} F$$

# La hiérarchie KP

A l'origine : équation Kadomtsev–Petviashvili (ondes non linéaires, généralise KdV)

Variables :  $p_1, p_2, p_3, \dots$

$$p_1 = x, p_2 = y, p_3 = t$$

$$F_{3,1} = F_{2,2} + \frac{1}{2}F_{1,1}^2 + \frac{1}{12}F_{1,1,1,1}$$

$$F_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} F$$

$$F_{4,1} = F_{3,2} + F_{1,1}F_{2,1} + \frac{1}{6}F_{1,1,1,2}$$

# La hiérarchie KP

A l'origine : équation Kadomtsev–Petviashvili (ondes non linéaires, généralise KdV)

Variables :  $p_1, p_2, p_3, \dots$

$p_1 = x, p_2 = y, p_3 = t$

$$F_{3,1} = F_{2,2} + \frac{1}{2}F_{1,1}^2 + \frac{1}{12}F_{1,1,1,1}$$

$$F_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} F$$

$$F_{4,1} = F_{3,2} + F_{1,1}F_{2,1} + \frac{1}{6}F_{1,1,1,2}$$

$$F_{5,1} = F_{4,2} + \frac{1}{24}F_{1^4}F_{1^2} + F_{1^2}F_{3,1} + \frac{1}{480}F_{1^6} + \frac{1}{8}F_{1^2}^3 + \frac{1}{8}F_{1^2,2^2} + \frac{1}{2}F_{2,1}^2 + \frac{1}{8}F_{3,1^3}$$

# La hiérarchie KP

A l'origine : équation Kadomtsev–Petviashvili (ondes non linéaires, généralise KdV)

Variables :  $p_1, p_2, p_3, \dots$

$p_1 = x, p_2 = y, p_3 = t$

$$F_{3,1} = F_{2,2} + \frac{1}{2}F_{1,1}^2 + \frac{1}{12}F_{1,1,1,1}$$

$$F_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} F$$

$$F_{4,1} = F_{3,2} + F_{1,1}F_{2,1} + \frac{1}{6}F_{1,1,1,2}$$

$$F_{5,1} = F_{4,2} + \frac{1}{24}F_{1^4}F_{1^2} + F_{1^2}F_{3,1} + \frac{1}{480}F_{1^6} + \frac{1}{8}F_{1^2}^3 + \frac{1}{8}F_{1^2,2^2} + \frac{1}{2}F_{2,1}^2 + \frac{1}{8}F_{3,1^3}$$

...

# La hiérarchie KP

Hiérarchie intégrable = on peut décrire "explicitement"  
l'espace des solutions (ici, le construire algébriquement)

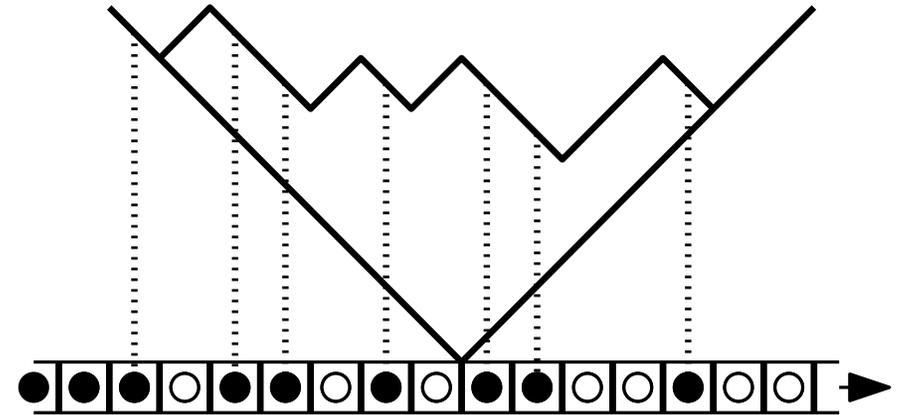
# La hiérarchie KP

Hiérarchie intégrable = on peut décrire "explicitement"  
l'espace des solutions (ici, le construire algébriquement)

Briques de base :

Objets : diagrammes Maya

Opérateurs : fermions



# La hiérarchie KP

Hiérarchie intégrable = on peut décrire "explicitement"  
l'espace des solutions (ici, le construire algébriquement)

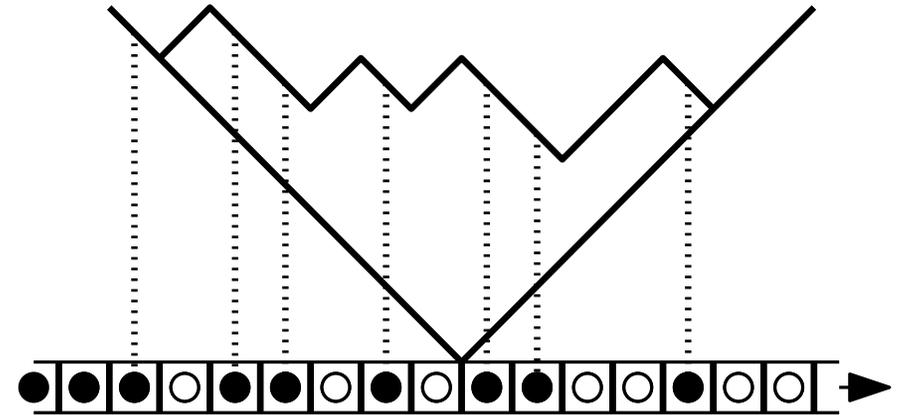
Briques de base :

Objets : diagrammes Maya

Opérateurs : fermions

Solutions : fonctions  $\tau$

Variables  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$



$$\tau = \langle \emptyset | \Gamma_+(\mathbf{p}) A | \emptyset \rangle$$

$$[A \otimes A, \Omega] = 0$$

# La hiérarchie KP

Hiérarchie intégrable = on peut décrire "explicitement"  
l'espace des solutions (ici, le construire algébriquement)

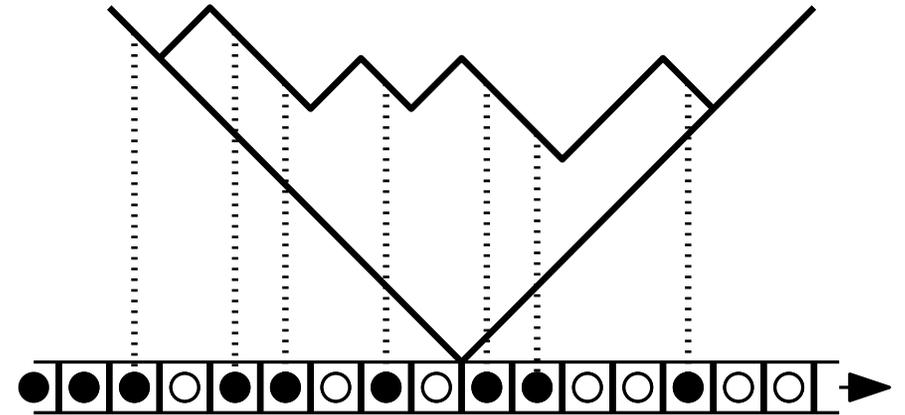
Briques de base :

Objets : diagrammes Maya

Opérateurs : fermions

Solutions : fonctions  $\tau$

Variables  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$



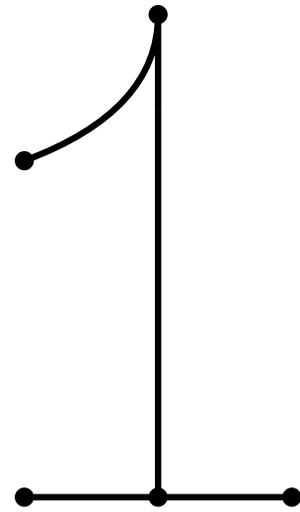
$$\tau = \langle \emptyset | \Gamma_+(\mathbf{p}) A | \emptyset \rangle$$

$$[A \otimes A, \Omega] = 0$$

Hiérarchie 2-Toda : 2 sets de variable  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ , une famille de fonctions  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

# Cartes et hiérarchie KP

**Théorème :** [Goulden–Jackson '08] La série génératrice des cartes est solution de la hiérarchie KP



**Des bijections**

# Bijections

**Contexte :** formule de Goulden–Jackson

$$(n + 1)\tau(n, g) = 4n(3n - 2)(3n - 4)\tau(n - 2, g - 1) + 4(3n - 1)\tau(n - 1, g) \\ + 4 \sum_{i+j=n-2} \sum_{g_1+g_2=g} (3i + 2)(3j + 2)\tau(i, g_1)\tau(j, g_2)$$

# Bijections

**Contexte :** formule de Goulden–Jackson

$$(n + 1)\tau(n, g) = 4n(3n - 2)(3n - 4)\tau(n - 2, g - 1) + 4(3n - 1)\tau(n - 1, g) \\ + 4 \sum_{i+j=n-2} \sum_{g_1+g_2=g} (3i + 2)(3j + 2)\tau(i, g_1)\tau(j, g_2)$$

Formule issue de KP, mais très "combinatoire"

(également formule de Carrell–Chapuy pour les cartes)

# Bijections

**Contexte** : formule de Goulden–Jackson

$$(n + 1)\tau(n, g) = 4n(3n - 2)(3n - 4)\tau(n - 2, g - 1) + 4(3n - 1)\tau(n - 1, g) \\ + 4 \sum_{i+j=n-2} \sum_{g_1+g_2=g} (3i + 2)(3j + 2)\tau(i, g_1)\tau(j, g_2)$$

Formule issue de KP, mais très "combinatoire"  
(également formule de Carrell–Chapuy pour les cartes)

Interprétation bijective ?

But ultime = bijection unifiée pour toutes les formules issues  
de KP, en toute généralité

# Bijections

**Contexte** : formule de Goulden–Jackson

$$(n + 1)\tau(n, g) = 4n(3n - 2)(3n - 4)\tau(n - 2, g - 1) + 4(3n - 1)\tau(n - 1, g) \\ + 4 \sum_{i+j=n-2} \sum_{g_1+g_2=g} (3i + 2)(3j + 2)\tau(i, g_1)\tau(j, g_2)$$

Formule issue de KP, mais très "combinatoire"  
(également formule de Carrell–Chapuy pour les cartes)

Interprétation bijective ?

But ultime = bijection unifiée pour toutes les formules issues  
de KP, en toute généralité

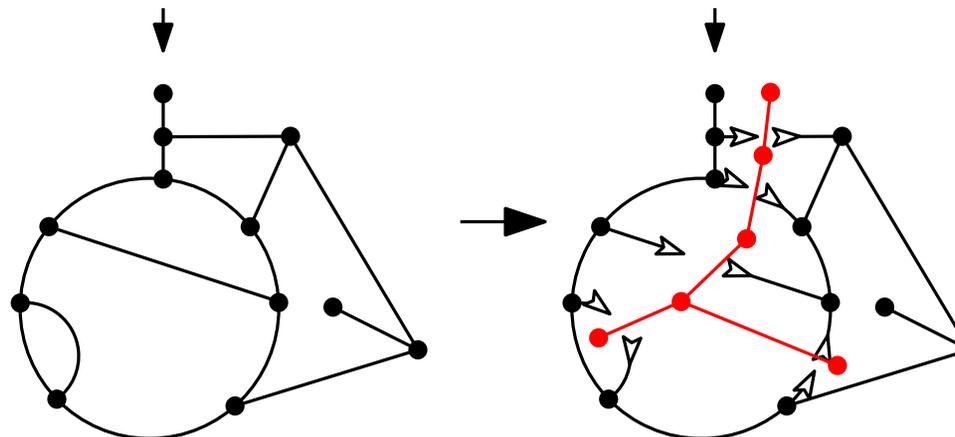
Cas particulier numéro 1 : bijection pour les cartes à une face  
(formule de Harer–Zagier) [Chapuy–Féray–Fusy '12]

# Bijections

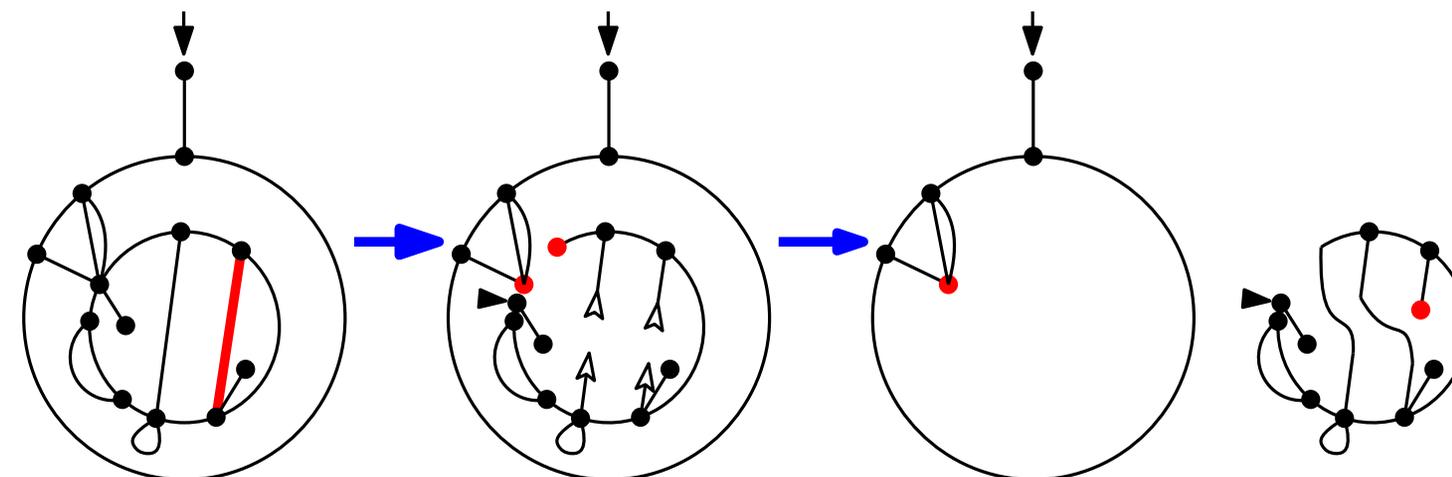
Cas particulier numéro 2 : cartes planaires ( $g=0$ )

Preuve bijective

→ exploration de la carte



→ opération "cut-slide"

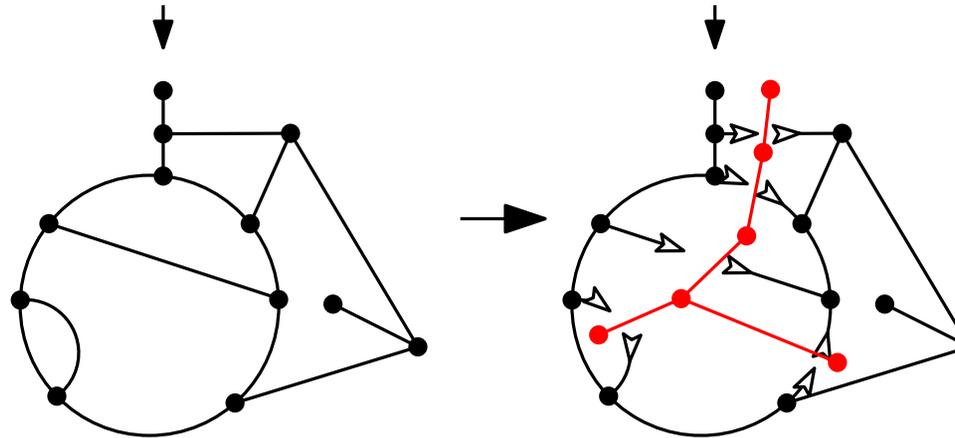


# Bijections

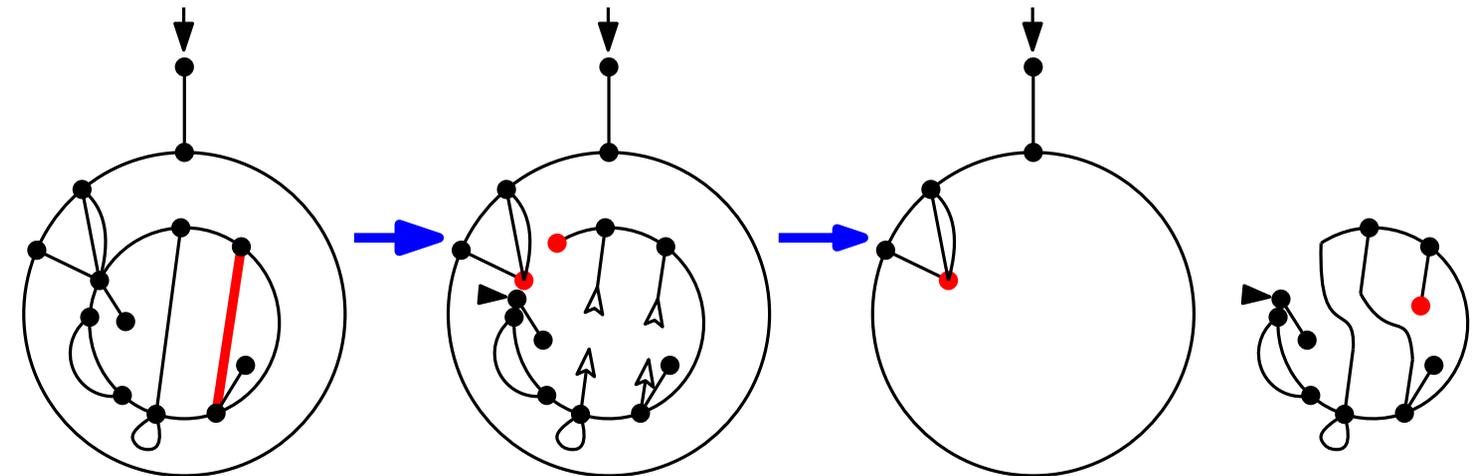
Cas particulier numéro 2 : cartes planaires ( $g=0$ )

Preuve bijective

→ exploration de la carte

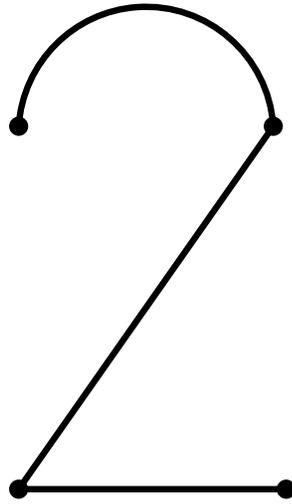


→ opération "cut-slide"



Au passage :

- extension de la bijection de Rémy pour les arbres plans à toutes les cartes planaires
- formule raffinée (contrôle des degrés des sommets)
- ébauche de bijection pour le genre supérieur



**Des formules**

# Formules

**Contexte** : formule de récurrences pour les cartes :

[Goulden–Jackson '08], [Carrell–Chapuy '14], [Kazarian–Zograf '15]

→ issues de la hiérarchie KP + opération combinatoire

→ toutes "combinatoires", quadratiques, très rapide pour calculer, "closes" (pas de variable catalytique)

# Formules

**Contexte** : formule de récurrences pour les cartes :

[Goulden–Jackson '08], [Carrell–Chapuy '14], [Kazarian–Zograf '15]

→ issues de la hiérarchie KP + opération combinatoire

→ toutes "combinatoires", quadratiques, très rapide pour calculer, "closes" (pas de variable catalytique)

Autre modèle : nombres de Hurwitz

→ [Okounkov '00]+[Dubrovin–Yang–Zagier '17] : astuces purement algébriques à partir de 2-Toda donnent une formule de récurrence (même "forme" que les précédentes)

# Formules

**Contexte** : formule de récurrences pour les cartes :

[Goulden–Jackson '08], [Carrell–Chapuy '14], [Kazarian–Zograf '15]

→ issues de la hiérarchie KP + opération combinatoire

→ toutes "combinatoires", quadratiques, très rapide pour calculer, "closes" (pas de variable catalytique)

Autre modèle : nombres de Hurwitz

→ [Okounkov '00]+[Dubrovin–Yang–Zagier '17] : astuces purement algébriques à partir de 2-Toda donnent une formule de récurrence (même "forme" que les précédentes)

Idée : mélanger un peu les deux approches et voir si ça marche

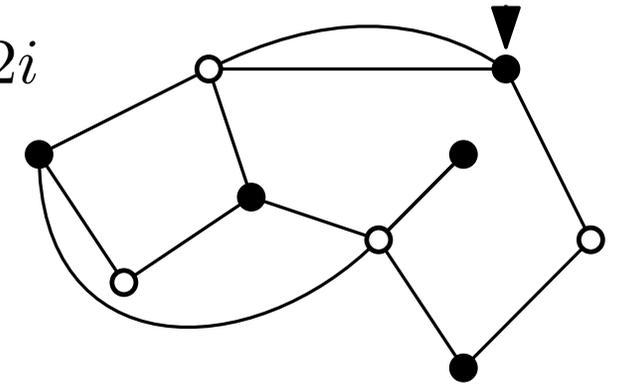
# Formules

Réponse : ça marche !

$$\binom{n+1}{2} \beta_g(\mathbf{f}) = \sum_{\substack{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{f} \\ g_1+g_2+g^*=g}} (1+n_1) \binom{v_2}{2g^*+2} \beta_{g_1}(\mathbf{s}) \beta_{g_2}(\mathbf{t}) + \sum_{g^* \geq 0} \binom{v+2g^*}{2g^*+2} \beta_{g-g^*}(\mathbf{f})$$

Cartes biparties à degrés prescrits :

$\beta_g(\mathbf{f}) =$  nb de cartes biparties de genre  $g$  avec  $f_i$  faces de degré  $2i$   
 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)$ .



# Formules

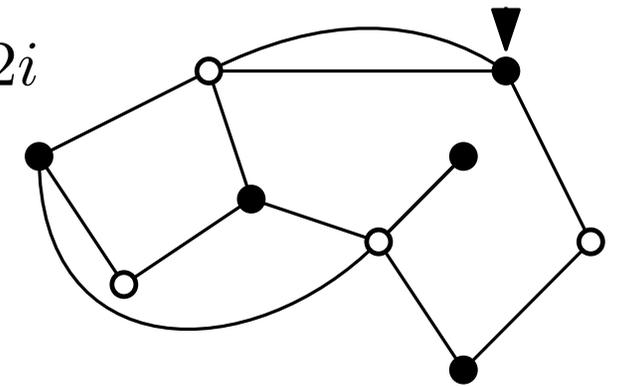
Réponse : ça marche !

$$\binom{n+1}{2} \beta_g(\mathbf{f}) = \sum_{\substack{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{f} \\ g_1+g_2+g^*=g}} (1+n_1) \binom{v_2}{2g^*+2} \beta_{g_1}(\mathbf{s}) \beta_{g_2}(\mathbf{t}) + \sum_{g^* \geq 0} \binom{v+2g^*}{2g^*+2} \beta_{g-g^*}(\mathbf{f})$$

Cartes biparties à degrés prescrits :

$\beta_g(\mathbf{f}) =$  nb de cartes biparties de genre  $g$  avec  $f_i$  faces de degré  $2i$   
 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)$ .

- même propriétés que les formules précédentes
- contrôle une infinité de paramètres
- se spécialise bien (ex :  $2k$ -angulations)



# Formules

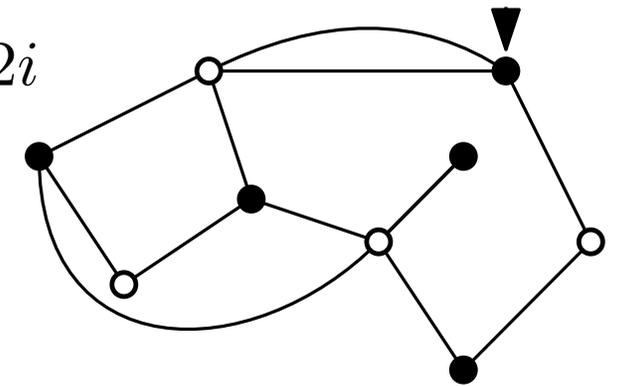
Réponse : ça marche !

$$\binom{n+1}{2} \beta_g(\mathbf{f}) = \sum_{\substack{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{f} \\ g_1+g_2+g^*=g}} (1+n_1) \binom{v_2}{2g^*+2} \beta_{g_1}(\mathbf{s}) \beta_{g_2}(\mathbf{t}) + \sum_{g^* \geq 0} \binom{v+2g^*}{2g^*+2} \beta_{g-g^*}(\mathbf{f})$$

Cartes biparties à degrés prescrits :

$\beta_g(\mathbf{f}) =$  nb de cartes biparties de genre  $g$  avec  $f_i$  faces de degré  $2i$   
 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)$ .

- même propriétés que les formules précédentes
- contrôle une infinité de paramètres
- se spécialise bien (ex :  $2k$ -angulations)

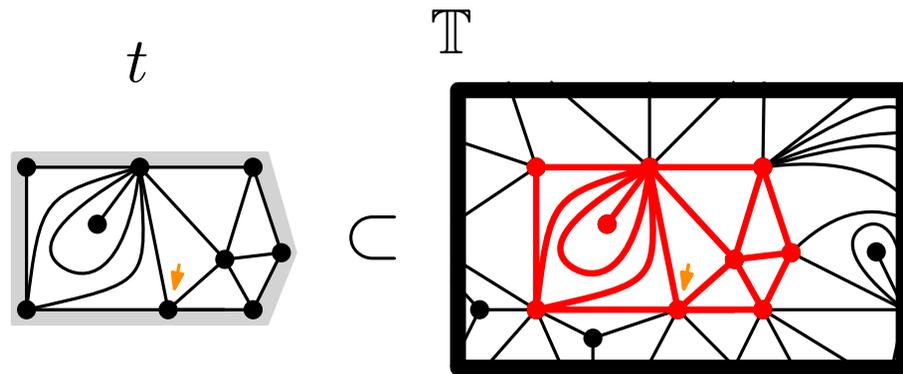


On a également des formules pour compter les constellations et les nombres de Hurwitz monotones.

## Interlude : limites locales de cartes

A quoi ressemble une grande carte aléatoire vue de près ?

Loi du voisinage de la racine



$$\mathbb{P}(t \subset T) = ?$$

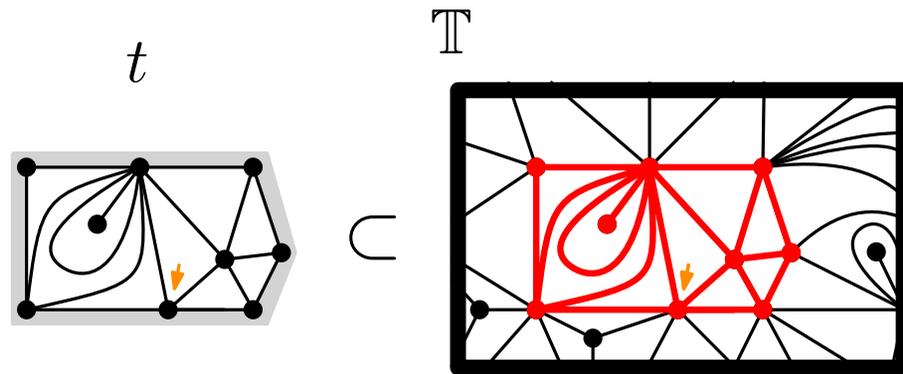


image : I. Kortchemski

## Interlude : limites locales de cartes

A quoi ressemble une grande carte aléatoire vue de près ?

Loi du voisinage de la racine



$$\mathbb{P}(t \subset T) = ?$$

$$\mathbb{P}(t \subset T_n) \rightarrow \mathbb{P}(t \subset T)$$

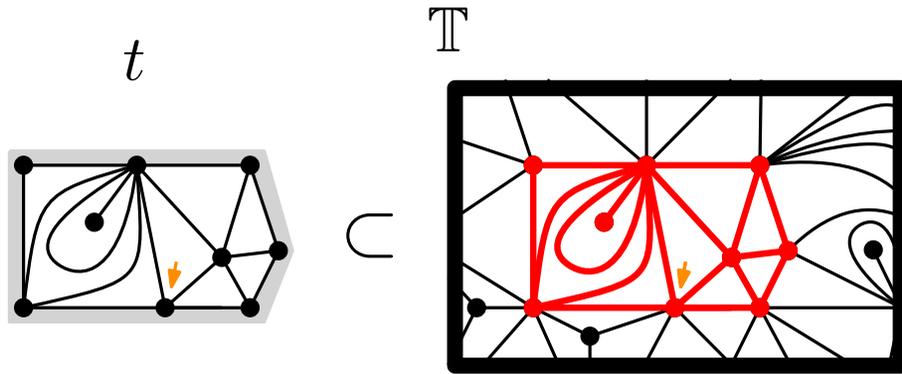


image : I. Kortchemski

## Interlude : limites locales de cartes

A quoi ressemble une grande carte aléatoire vue de près ?

Loi du voisinage de la racine



$$\mathbb{P}(t \subset T) = ?$$

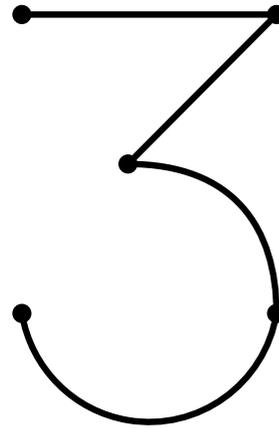
$$\mathbb{P}(t \subset T_n) \rightarrow \mathbb{P}(t \subset T)$$

[Angel-Schramm '02] :

triangulations planaires uniformes  $\rightarrow$  UIPT



image : I. Kortchemski



**Du grand genre**

# Grand genre

**Contexte :** [Curien '14] PSHT, généralisation de l'UIPT  
Jolie loi, dépend d'un paramètre  $\lambda$  ( $\lambda_c \rightarrow$  UIPT)

- comportement hyperbolique (marche aléatoire transiente, "degré moyen"  $> 6$ , ...)
- est-ce la limite locale de quelque chose ?
- candidat naturel = triangulations de grand genre ( $g_n \simeq \theta n$ )

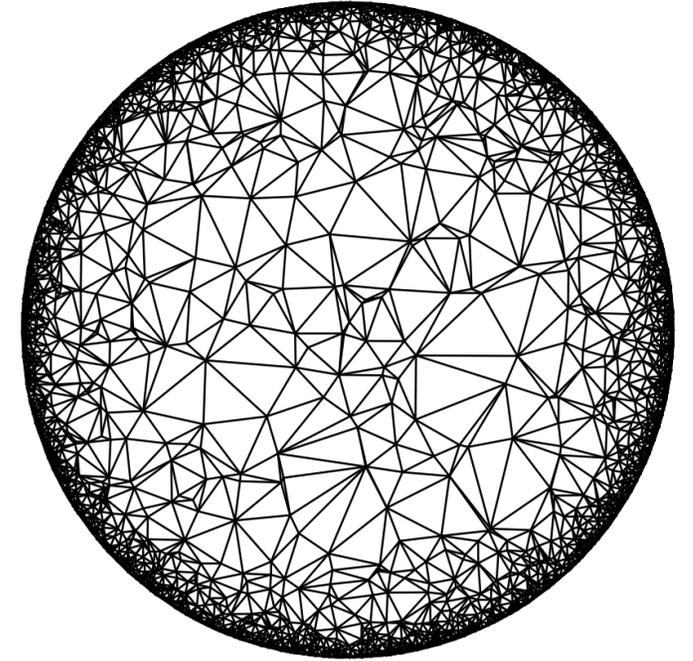


image : N. Curien

# Grand genre

**Contexte :** [Curien '14] PSHT, généralisation de l'UIPT  
Jolie loi, dépend d'un paramètre  $\lambda$  ( $\lambda_c \rightarrow$  UIPT)

- comportement hyperbolique (marche aléatoire transiente, "degré moyen"  $> 6$ , ...)
- est-ce la limite locale de quelque chose ?
- candidat naturel = triangulations de grand genre ( $g_n \simeq \theta n$ )

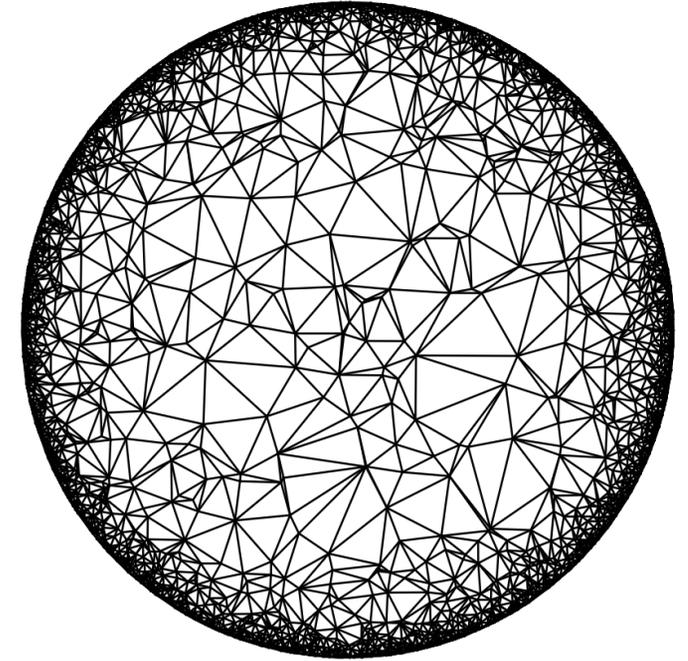
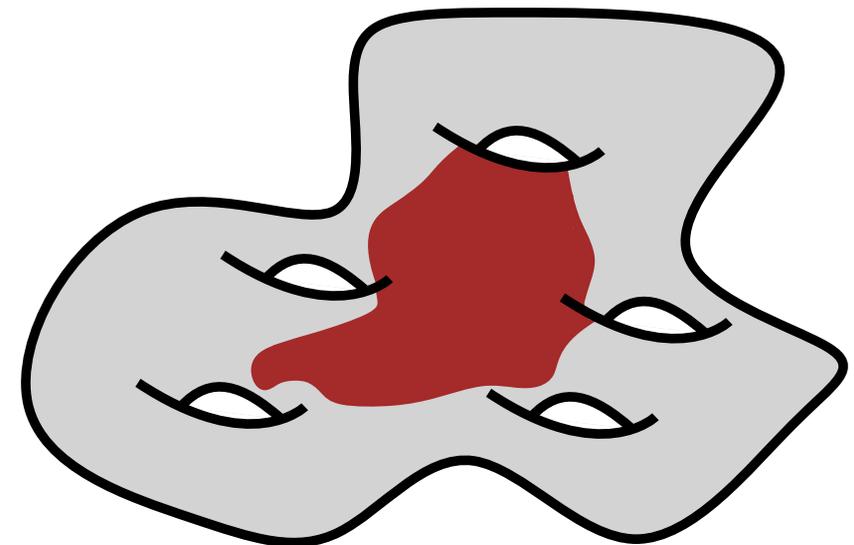


image : N. Curien

**Conjecture** par Benjamini et Curien :  
Les triangulations uniformes de grand genre convergent localement vers la PSHT

Prouvé avec Thomas Budzinski



# Grand genre

Première idée : énumération asymptotique  $\rightarrow$  trop dur

## Etape 1 : Tension

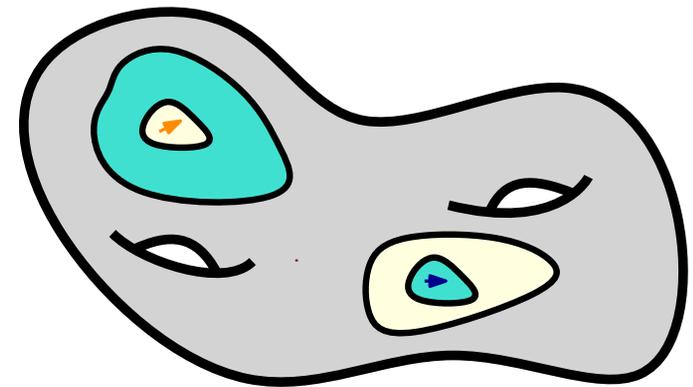
Bounded ratio lemma (preuve = injection)  
Planarité + "one-endedness" (preuve avec  
Goulden–Jackson)

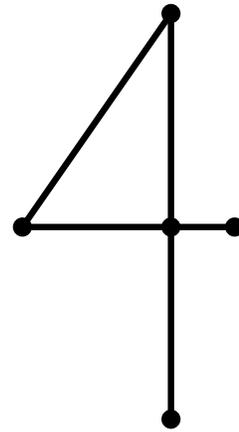
## Etape 2 : Mélange de PSHT

Limites possibles = PSHT avec paramètre aléatoire  
(preuve = méthode des moments de Hausdorff +  
équations de peeling)

## Etape 3 : Le paramètre est déterministe

Argument global = argument des deux trous  
Argument local = inverse degré racine





**De l'universalité**

# Universalité

Universalité = modèles différents mais phénomènes similaires

On sait maintenant que les triangulations de grand genre convergent vers une carte infinie du plan avec des propriétés hyperboliques.

Qu'en est-il des autres modèles de cartes de grand genre ?

Un modèle qui couvre plein de cas : les cartes biparties à degrés prescrits !

L'objet limite potentiel (IBPM) est déjà construit, et il a des propriétés similaires à la PSHT

**Théorème** (avec Thomas Budzinski) :

Les cartes biparties à degrés prescrits uniformes de grand genre convergent localement vers l'IBPM

Pour finir, **deux problèmes ouverts** :

- ¿ Explication bijective des formules issues de KP
- ¿ Diamètre des cartes de grand genre (d'ordre  $\log n$  a priori)

Merci de votre attention !









